$Header:$
$/Users/joseph/Documents/LaTeX/beamer/base/beamerbasedecode.sty, ve$
$27:$
$03rivanvx$
$Header:$
$/Users/joseph/Documents/LaTeX/beamer/base/beamerbaseoptions.sty, v$
$24:$
$31joseph$

Au cœur de l'isochronie

Alicia Simon-Petit, **Jérôme Perez**, Guillaume Duval

Réference

2018, Communication in Mathematical Physics,
Alicia Simon-Petit, Jérôme Perez, Guillaume Duval.
Isochrony in 3D radial potentials.
Préprint : https ://arxiv.org/abs/1804.11282.

Sommaire

Sommaire

Dynamique Gravitationelle

Equation de Boltzmann sans collision :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \nabla \psi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

Dynamique Gravitationelle

Equation de Boltzmann sans collision :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \nabla \psi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

- Fonction de distribution $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$.

Dynamique Gravitationelle

Equation de Boltzmann sans collision :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \nabla \psi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

- Fonction de distribution $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$.
- Potentiel gravitationnel :

$$\psi = -G \cdot \left(\mathcal{G} * \underbrace{\int f \mathrm{d}\mathbf{v}}_{\text{densité, } \rho} \right) \Leftrightarrow \Delta\psi = 4\pi G \int f \mathrm{d}\mathbf{v}$$

Dynamique Gravitationelle

Equation de Boltzmann sans collision :

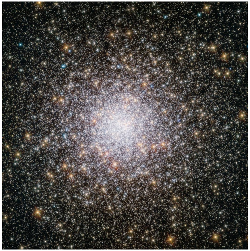
$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \nabla \psi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

- Fonction de distribution $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$.
- Potentiel gravitationnel :

$$\psi = -G \cdot \left(\mathcal{G} * \underbrace{\int f \mathrm{d}\mathbf{v}}_{\text{densité, } \rho} \right) \Leftrightarrow \Delta\psi = 4\pi G \int f \mathrm{d}\mathbf{v}$$

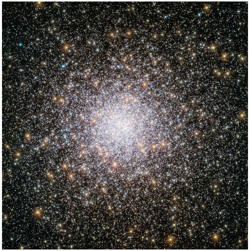
- Sans collisions car généralement $T_{\text{dyn}} \ll T_{\text{col}}$

Amas globulaires



NGC362 — Source : Hubble

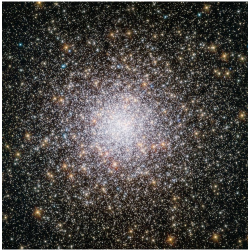
Amas globulaires



NGC362 — Source : Hubble

Comment déterminer ψ ?

Amas globulaires

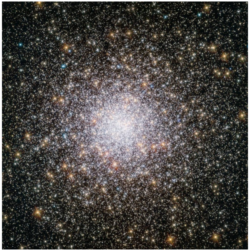


NGC362 — Source : Hubble

Comment déterminer ψ ?

1. A partir des observations : en supposant une relation masse-luminosité $\nu \propto \rho$ et en résolvant l'équation de Poisson $\Delta\psi = \rho$.

Amas globulaires

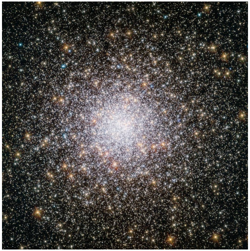


NGC362 — Source : Hubble

Comment déterminer ψ ?

1. A partir des observations : en supposant une relation masse-luminosité $\nu \propto \rho$ et en résolvant l'équation de Poisson $\Delta\psi = \rho$.
2. A partir de considérations théoriques...

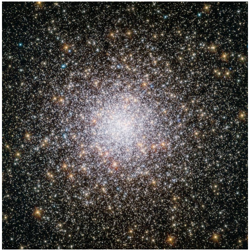
Amas globulaires



NGC362 — Source : Hubble

Comment déterminer ψ ? $\Delta\psi = \rho$ avec

Amas globulaires

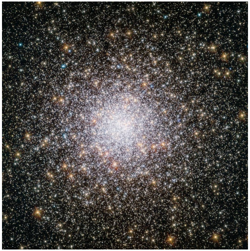


NGC362 — Source : Hubble

Comment déterminer ψ ? $\Delta\psi = \rho$ avec

- $\rho = \text{cst} \implies \psi_{\text{ha}}(r) = \frac{1}{2}\omega^2 r^2$,

Amas globulaires

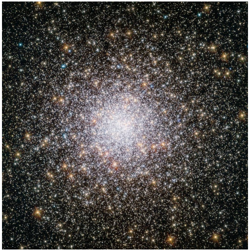


NGC362 — Source : Hubble

Comment déterminer ψ ? $\Delta\psi = \rho$ avec

- $\rho = \text{cst} \implies \psi_{\text{ha}}(r) = \frac{1}{2}\omega^2 r^2$,
- $\rho =$ "$\delta(\mathbf{r}_0)$"$M \implies \psi_{\text{ke}}(r) = -\frac{GM}{r}$,

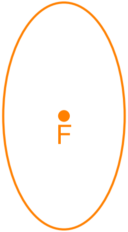
Amas globulaires



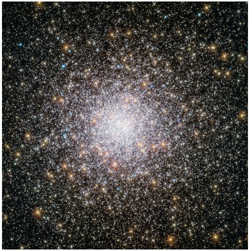
NGC362 — Source : Hubble

Comment déterminer ψ ? $\Delta\psi = \rho$ avec

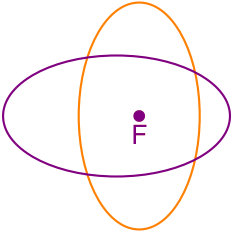
- $\rho = \text{cst} \implies \psi_{\text{ha}}(r) = \dfrac{1}{2}\omega^2 r^2,$ $\qquad T = \dfrac{2\pi}{\omega}$
- $\rho = \text{“}\delta(\mathbf{r}_0)\text{”}M \implies \psi_{\text{ke}}(r) = -\dfrac{GM}{r},$



Amas globulaires



NGC362 — Source : Hubble



Comment déterminer ψ ? $\Delta\psi = \rho$ avec

- $\rho = \text{cst} \implies \psi_{\text{ha}}(r) = \frac{1}{2}\omega^2 r^2,$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- $\rho = \text{“}\delta(\mathbf{r}_0)\text{”}M \implies \psi_{\text{ke}}(r) = -\frac{GM}{r},$ $T^2 \propto a^3 \propto |E|^{-3}$: 3^{eme} loi de K.

Sommaire

Potentiels isochrones

L'énergie :

$$E = m\xi = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\Lambda^2}{2r^2}\right] + m\psi$$

fournit l'équation du mouvement radial dans le plan orbital fixé par Λ :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\Lambda^2}{2r^2} - (\xi - \psi) = 0 \qquad \text{(M)}$$

Potentiels isochrones

l'équation du mouvement radial dans le plan orbital fixé par Λ :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\Lambda^2}{2r^2} - (\xi - \psi) = 0 \qquad \text{(M)}$$

Potentiels isochrones

l'équation du mouvement radial dans le plan orbital fixé par Λ :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\Lambda^2}{2r^2} - (\xi - \psi) = 0 \qquad \text{(M)}$$

- Pour un potentiel donné, ψ, l'ensemble des orbites périodiques est donné par

$$\Theta_\psi = \left\{(\xi,\Lambda) \in \mathbb{R}^2,\ \text{t.q. } r(\cdot) \text{ soit périodique et solution de (M)}\right\}.$$

Potentiels isochrones

l'équation du mouvement radial dans le plan orbital fixé par Λ :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\Lambda^2}{2r^2} - (\xi - \psi) = 0 \qquad \text{(M)}$$

- Pour un potentiel donné, ψ, l'ensemble des orbites périodiques est donné par

$$\Theta_\psi = \left\{(\xi, \Lambda) \in \mathbb{R}^2,\ \text{t.q. } r(\cdot) \text{ soit périodique et solution de (M)}\right\}.$$

- Si $(\xi, \Lambda) \in \Theta_\psi$, alors la période

$$\tau_r(\xi, \Lambda) = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\left(\xi - \psi(r)\right) - \frac{\Lambda^2}{r^2}}} < \infty.$$

Potentiels isochrones

l'équation du mouvement radial dans le plan orbital fixé par Λ :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{\Lambda^2}{2r^2}-(\xi-\psi)=0 \qquad \text{(M)}$$

- Pour un potentiel donné, ψ, l'ensemble des orbites périodiques est donné par

$$\Theta_\psi=\left\{(\xi,\Lambda)\in\mathbb{R}^2,\ \text{t.q. } r(\cdot) \text{ soit périodique et solution de (M)}\right\}.$$

- Si $(\xi,\Lambda)\in\Theta_\psi$, alors la période

$$\tau_r(\xi,\Lambda)=2\int_{r_{min}}^{r_{max}}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\,(\xi-\psi(r))-\frac{\Lambda^2}{r^2}}}<\infty.$$

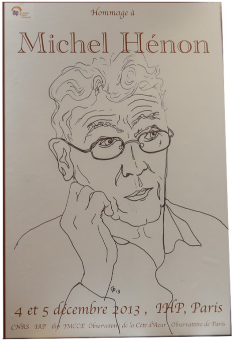
Chercher un potentiel isochrone :

Trouver tous les $\psi(r)$, t.q. $\Theta_\psi\neq\emptyset$ et $\forall\,(\xi,\Lambda)\in\Theta_\psi,\tau_r(\xi,\Lambda)\equiv\tau_r(\xi)$.

La propriété géométrique de l'isochronie

Idée : $\begin{pmatrix} r \\ \psi \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x = 2r^2 \\ Y(x) = x\psi(x) \end{pmatrix}$,

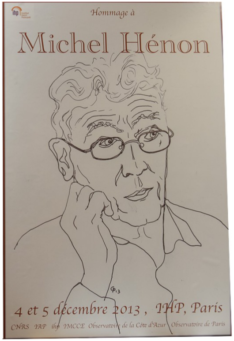
$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \xi - \frac{\Lambda^2}{2r^2} - \psi(r). \qquad \text{(M)}$$



La propriété géométrique de l'isochronie

Idée : $\begin{pmatrix} r \\ \psi \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x = 2r^2 \\ Y(x) = x\psi(x) \end{pmatrix},$

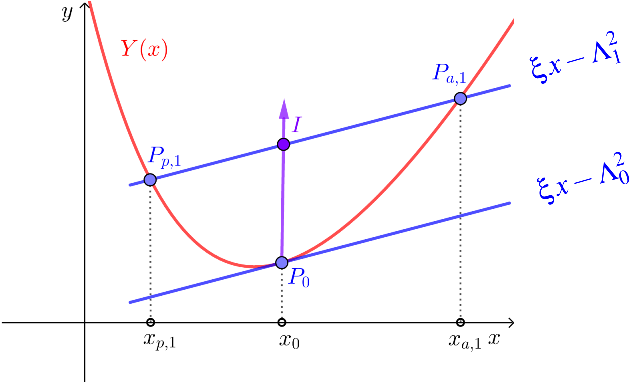
$$\frac{1}{16}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \xi x - \Lambda^2 - Y(x). \qquad \text{(M)}$$

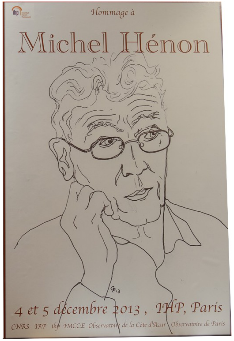


La propriété géométrique de l'isochronie

Idée : $\begin{pmatrix} r \\ \psi \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x = 2r^2 \\ Y(x) = x\psi(x) \end{pmatrix}$,

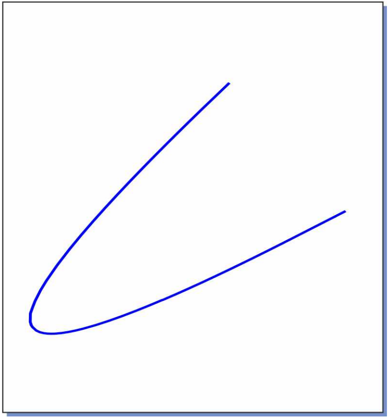
$$\frac{1}{16}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \xi x - \Lambda^2 - Y(x). \qquad \text{(M)}$$





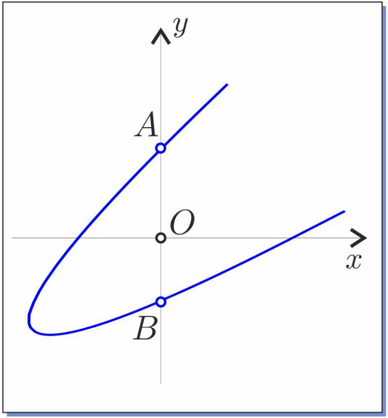
Les paraboles isochrones

$$\frac{1}{16}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \xi x - \Lambda^2 - Y(x)\,. \qquad \text{(M)}$$



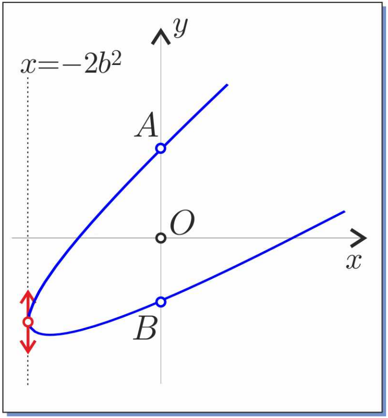
Les paraboles isochrones

$$\frac{1}{16}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \xi x - \Lambda^2 - Y(x)\,. \tag{M}$$



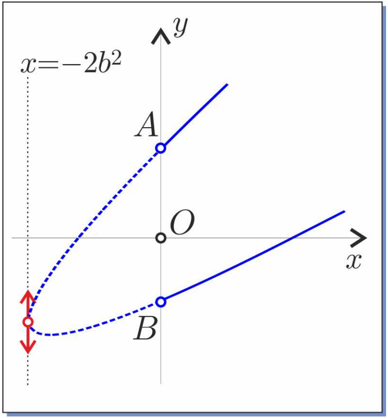
Les paraboles isochrones

$$\frac{1}{16}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \xi x - \Lambda^2 - Y(x)\,. \qquad \text{(M)}$$



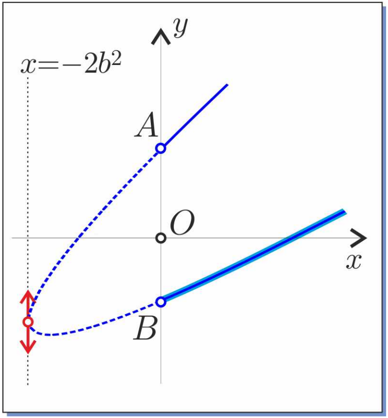
Les paraboles isochrones

$$\frac{1}{16}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \xi x - \Lambda^2 - Y(x)\,. \qquad \text{(M)}$$



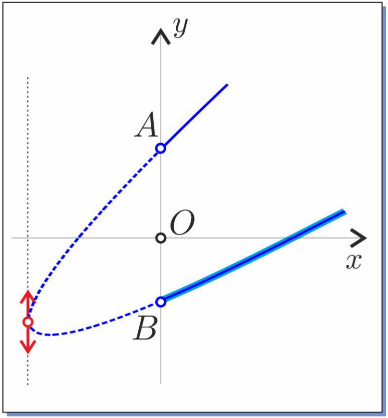
Les paraboles isochrones

$$\frac{1}{16}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \xi x - \Lambda^2 - Y(x)\,. \qquad \text{(M)}$$



Changer ξ ou Λ

$$\frac{1}{16}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \xi x - \Lambda^2 - Y(x)\,.$$



$$Y(x) = x\,\psi(x)$$

Modifier l'énergie : $\xi \to \xi + \alpha$

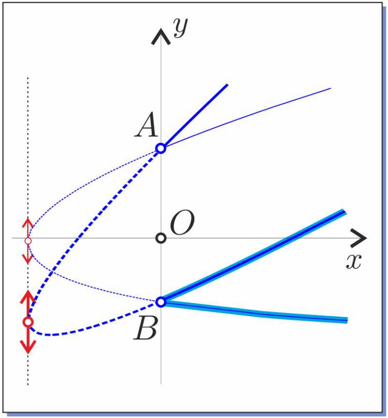
peut être absorbé par $\psi \to \psi - \alpha$

i.e. appliquer une transvection à la parabole

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Changer ξ ou Λ

$$\frac{1}{16}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \xi x - \Lambda^2 - Y(x)\,.$$



$$Y(x) = x\psi(x)$$

Modifier l'énergie : $\xi \to \xi + \alpha$

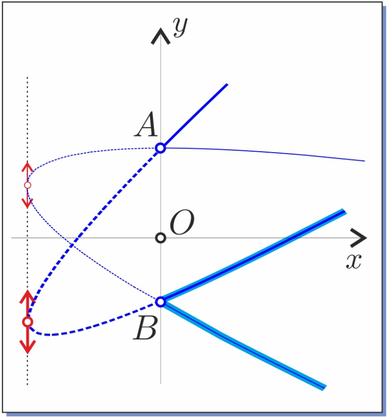
peut être absorbé par $\psi \to \psi - \alpha$

i.e. appliquer une transvection à la parabole

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Changer ξ ou Λ

$$\frac{1}{16}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \xi x - \Lambda^2 - Y(x)\,.$$



$$Y(x) = x\psi(x)$$

Modifier l'énergie : $\xi \to \xi + \alpha$

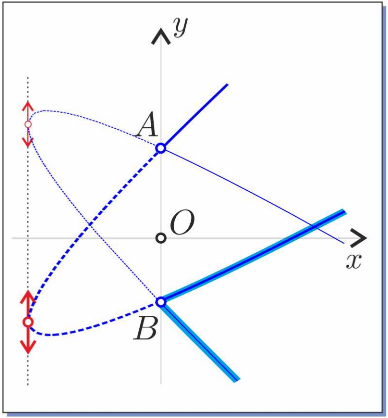
peut être absorbé par $\psi \to \psi - \alpha$

i.e. appliquer une transvection à la parabole

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Changer ξ ou Λ

$$\frac{1}{16}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \xi x - \Lambda^2 - Y(x)\,.$$



$$Y(x) = x\,\psi(x)$$

Modifier l'énergie : $\xi \to \xi + \alpha$

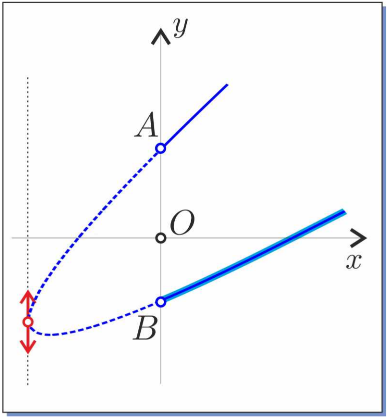
peut être absorbé par $\psi \to \psi - \alpha$

i.e. appliquer une transvection à la parabole

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Changer ξ ou Λ

$$\frac{1}{16}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \xi x - \Lambda^2 - Y(x).$$



$$Y(x) = x\psi(x)$$

Modifier le moment cinétique :

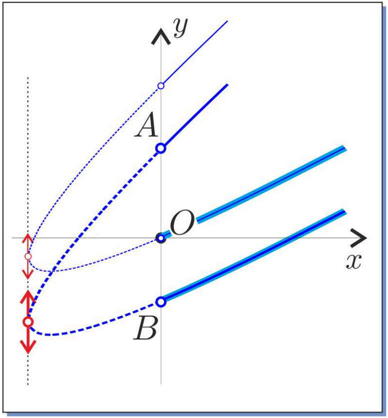
$$\Lambda^2 \to \Lambda^2 + \beta$$

peut être absorbé par $Y \to Y - \beta$

i.e. appliquer une translation à la parabole

Changer ξ ou Λ

$$\frac{1}{16}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \xi x - \Lambda^2 - Y(x)\,.$$



$$Y(x) = x\psi(x)$$

Modifier le moment cinétique :

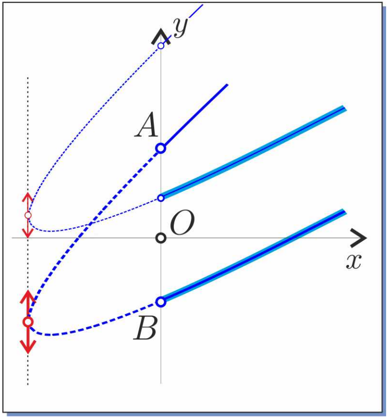
$$\Lambda^2 \to \Lambda^2 + \beta$$

peut être absorbé par $Y \to Y - \beta$

i.e. appliquer une translation à la parabole

Changer ξ ou Λ

$$\frac{1}{16}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \xi x - \Lambda^2 - Y(x)\,.$$



$$Y(x) = x\psi(x)$$

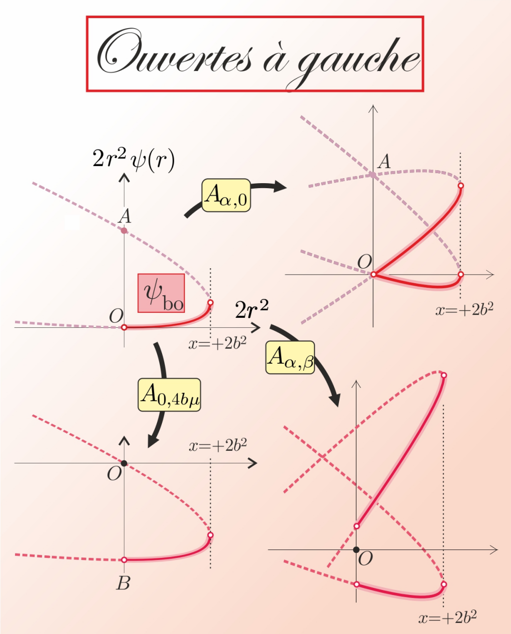
Modifier le moment cinétique :

$$\Lambda^2 \to \Lambda^2 + \beta$$

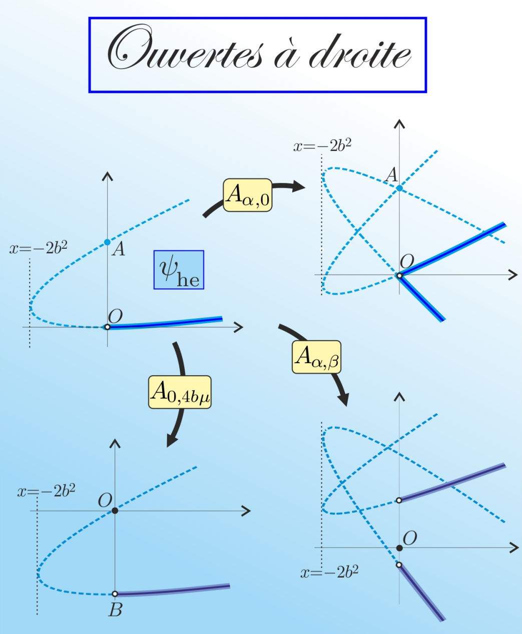
peut être absorbé par $Y \to Y - \beta$

i.e. appliquer une translation à la parabole

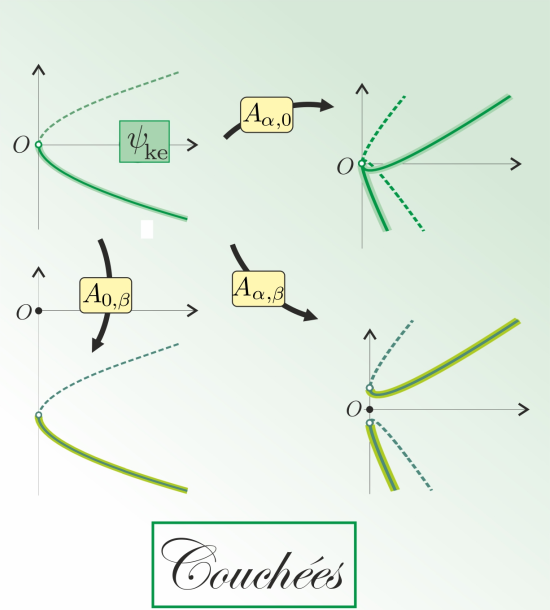
Classification des isochrones



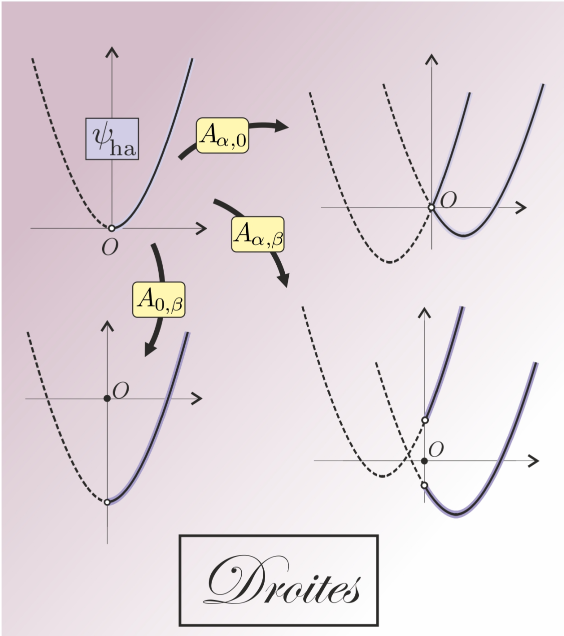
Classification des isochrones



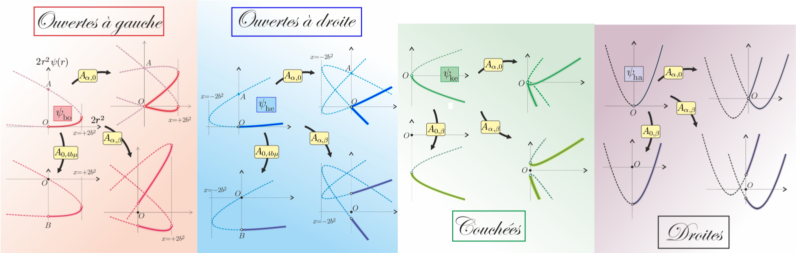
Classification des isochrones



Classification des isochrones



Classification des isochrones



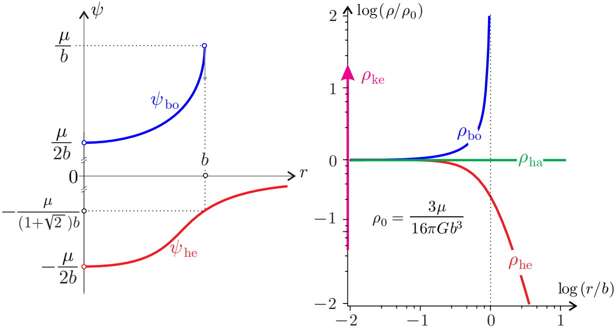
Théorème

Il existe 4 familles de potentiels isochrones $\psi_{\rm ke}$, $\psi_{\rm ha}$, $\psi_{\rm he}$ *et* $\psi_{\rm bo}$*.*
Tout potentiel isochrone est dans l'orbite de l'un de ces potentiels sous l'action du groupe $\mathbb{A} = \{\alpha -$ *transvections*, $\beta -$ *translations*$\}$.

Classification des isochrones

Théorème

Il existe 4 familles de potentiels isochrones ψ_{ke}, ψ_{ha}, ψ_{he} *et* ψ_{bo}.
Tout potentiel isochrone est dans l'orbite de l'un de ces potentiels sous l'action du groupe $\mathbb{A} = \{\alpha - \textit{transvections}, \beta - \textit{translations}\}$.



Potentiel et masse volumique du Hénon et du borné.

Sommaire

De l'harmonique au Keplerien...

De l'harmonique au Keplerien...

Harmonique

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ha}} = \frac{1}{2}\left(p_q^2 + \frac{p_\theta^2}{q^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}\omega^2 q^2}_{\psi_{\mathrm{ha}}(q)=\frac{1}{2}\omega^2 q^2}$$

De l'harmonique au Keplerien...

Harmonique

$$\mathcal{H}_{\text{ha}} = \frac{1}{2}\left(p_q^2 + \frac{p_\theta^2}{q^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}\omega^2 q^2}_{\psi_{\text{ha}}(q)=\frac{1}{2}\omega^2 q^2}$$

Transformation canonique :

$$(q,\theta,p_q,p_\theta) \to (x,\theta,p_x,p_\theta)$$

avec $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial q} & \dfrac{\partial x}{\partial p_q} \\ \dfrac{\partial p_x}{\partial q} & \dfrac{\partial p_x}{\partial p_q} \end{vmatrix} = 1.$

De l'harmonique au Keplerien...

Harmonique

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ha}} = \frac{1}{2}\left(p_q^2 + \frac{p_\theta^2}{q^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}\omega^2 q^2}_{\psi_{\mathrm{ha}}(q)=\frac{1}{2}\omega^2 q^2}$$

Transformation canonique :

$$(q,\theta,p_q,p_\theta) \rightarrow (x,\theta,p_x,p_\theta)$$

avec $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial q} & \cancel{\dfrac{\partial x}{\partial p_q}} \\ \dfrac{\partial p_x}{\partial q} & \dfrac{\partial p_x}{\partial p_q} \end{vmatrix} = 1$, si $x = \dfrac{q^2}{\ell}$ alors $p_x = \dfrac{\ell \cdot p_q}{2q}$ ainsi

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ha}} = \frac{4x}{\ell}\left[\frac{1}{2}\left(p_x^2 + \frac{p_\theta^2}{4x^2}\right) + \frac{\omega^2 \ell^2}{8}\right].$$

De l'harmonique au Keplerien...

Harmonique

$$\psi_{\mathrm{ha}}(q) = \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

Kepler

$$\psi_{\mathrm{ke}}(r) = -\frac{\mu}{r}$$

Transformation canonique :

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ha}} = \frac{4x}{\ell}\left[\frac{1}{2}\left(p_x^2 + \frac{p_\theta^2}{4x^2}\right) + \frac{\omega^2\ell^2}{8}\right]$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ke}} = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) - \frac{\mu}{r}$$

De l'harmonique au Keplerien...

Harmonique

$$\psi_{\mathrm{ha}}(q) = \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

Kepler

$$\psi_{\mathrm{ke}}(r) = -\frac{\mu}{r}$$

Transformation canonique :

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ha}} = \frac{4x}{\ell}\left[\frac{1}{2}\left(p_x^2 + \frac{p_\theta^2}{4x^2}\right) + \frac{\omega^2\ell^2}{8}\right]$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ke}} = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) - \frac{\mu}{r}$$

que l'on récrit sous la forme

$$\boxed{-\frac{\omega^2\ell^2}{8}} = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + \boxed{\frac{p_\theta^2}{4x^2}}\right) \boxed{-\frac{\ell\mathcal{H}_{\mathrm{ha}}}{4x}}$$

et en posant $\mathcal{H}_{\mathrm{ke}} = -\dfrac{\omega^2\ell^2}{8}$ $\quad p_\varphi = \dfrac{p_\theta}{2}$ $\quad \mu = \dfrac{\ell\mathcal{H}_{\mathrm{ha}}}{4}$

De l'harmonique au Keplerien...

Harmonique

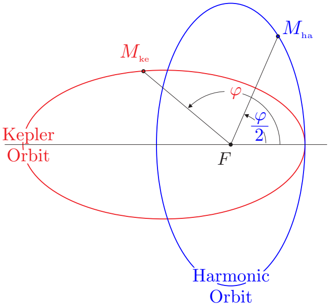
$$\psi_{\text{ha}}(q) = \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

$$\mathcal{H}_{\text{ha}} = \frac{4x}{\ell}\left[\frac{1}{2}\left(p_x^2 + \frac{p_\theta^2}{4x^2}\right) + \frac{\omega^2\ell^2}{8}\right]$$

Kepler

$$\psi_{\text{ke}}(r) = -\frac{\mu}{r}$$

$$\mathcal{H}_{\text{ke}} = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) - \frac{\mu}{r}$$



De l'harmonique au Keplerien...

Harmonique

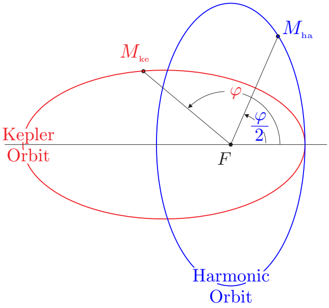
$$\psi_{\mathrm{ha}}(q) = \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ha}} = \frac{4x}{\ell}\left[\frac{1}{2}\left(p_x^2 + \frac{p_\theta^2}{4x^2}\right) + \frac{\omega^2\ell^2}{8}\right]$$

Kepler

$$\psi_{\mathrm{ke}}(r) = -\frac{\mu}{r}$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ke}} = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) - \frac{\mu}{r}$$



alias Goursat, Darboux, Levi-Civita, Transformation de Bohlin ($z \mapsto \frac{1}{2}z^2$), etc.

De l'harmonique au Keplerien...

Harmonique

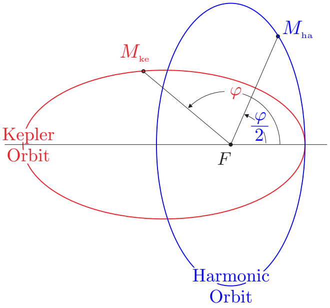
$$\psi_{\rm ha}(q) = \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

$$\mathcal{H}_{\rm ha} = \frac{4x}{\ell}\left[\frac{1}{2}\left(p_x^2 + \frac{p_\theta^2}{4x^2}\right) + \frac{\omega^2 \ell^2}{8}\right]$$

Kepler

$$\psi_{\rm ke}(r) = -\frac{\mu}{r}$$

$$\mathcal{H}_{\rm ke} = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) - \frac{\mu}{r}$$



alias Goursat, Darboux, Levi-Civita, Transformation de Bohlin ($z \mapsto \frac{1}{2}z^2$), etc.

Echange

$$\xi x \longleftrightarrow Y(x) = x\psi(x)$$

total

Les Bolsts

Echange partiel $\xi x \leftrightarrow Y(x)$ qui préserve l'isochronie ?

Les Bolsts

Echange partiel $\xi x \leftrightarrow Y(x)$ qui préserve l'isochronie ?

$$\frac{1}{16}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\Lambda^2=\xi x-Y\left(x\right), \qquad \frac{1}{16}\left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2+\left(\Lambda'\right)^2=\xi' x'-Y'\left(x'\right).$$

Echange linéaire entre ξx et y :

$$\xi x-y=\xi' x'-y',$$

Les Bolsts

Echange partiel $\xi x \leftrightarrow Y(x)$ qui préserve l'isochronie ?

$$\frac{1}{16}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\Lambda^2=\xi x-Y(x), \qquad \frac{1}{16}\left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2+(\Lambda')^2=\xi' x'-Y'(x').$$

Echange linéaire entre ξx et y :

$$\begin{pmatrix} \xi' x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi x \\ y \end{pmatrix}$$

Les Bolsts

Echange partiel $\xi x \leftrightarrow Y(x)$ qui préserve l'isochronie ?

$$\frac{1}{16}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \Lambda^2 = \xi x - Y(x), \qquad \frac{1}{16}\left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2 + (\Lambda')^2 = \xi' x' - Y'(x').$$

Echange linéaire entre ξx et y :

$$\begin{pmatrix} \xi' x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi x \\ y \end{pmatrix}$$

Les Bolsts

Echange partiel $\xi x \leftrightarrow Y(x)$ qui préserve l'isochronie ?

$$\frac{1}{16}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \Lambda^2 = \xi x - Y(x), \qquad \frac{1}{16}\left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2 + (\Lambda')^2 = \xi' x' - Y'(x').$$

Echange linéaire entre ξx et y :

$$\begin{pmatrix} \xi' x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha - 1 & \beta + 1 \end{bmatrix}}_{B_{\alpha,\beta}} \begin{pmatrix} \xi x \\ y \end{pmatrix}$$

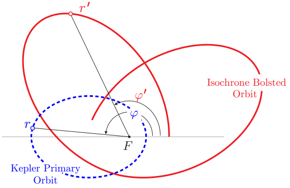
Les Bolsts

Théorème

Quand $\alpha\beta\xi' \neq 0$, *l'image d'une* PRO *keplerienne par* $B_{\alpha,\beta}$ *est une orbite isochrone telle que* $\left(\chi = \dfrac{p\alpha\,|\xi|}{\mu\beta}\right)$

$$\left(r'\right)^2 = \frac{\alpha\xi r^2 - \mu\beta r}{\xi'},$$

$$\varphi'(\varphi) = \frac{\varphi}{2} + \frac{\chi}{\sqrt{(1+\chi)^2 - e^2}} \arctan\left[\sqrt{\frac{1+\chi-e}{1+\chi+e}} \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right].$$



Les $\boldsymbol{i}$Bolsts

Echange partiel entre $\xi x \leftrightarrow Y(x)$ qui préserve l'isochronie ?

$$\frac{1}{16}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\Lambda^2=\xi x-Y\left(x\right), \qquad \frac{1}{16}\left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2+\left(\Lambda'\right)^2=\xi' x'-Y'\left(x'\right)$$

Echange symétrique entre ξx et y :

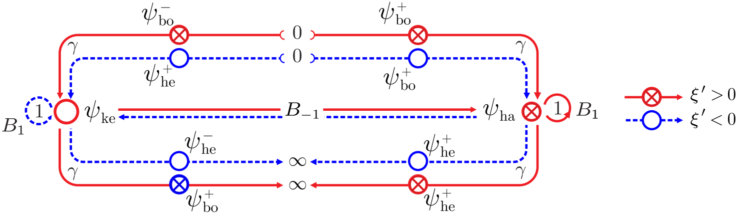
$$\begin{pmatrix} \xi' x' \\ y' \end{pmatrix}=\underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \gamma+1 & \gamma-1 \\ \gamma-1 & \gamma+1 \end{bmatrix}}_{B_\gamma}\begin{pmatrix} \xi x \\ y \end{pmatrix},$$

où B_γ est inversible $\Leftrightarrow \gamma=\alpha+\beta\neq 0$.

Le groupe des $\boldsymbol{i}$Bolst kepleriens

Proposition

Tout potentiel isochrone est dans l'orbite du potentiel keplerien sous l'action du groupe des $\boldsymbol{i}$Bolst $\mathbb{B} = \left\{B_\gamma, \gamma \in \mathbb{R}^*\right\}$.



iBolsts

La représentation additive de $\mathbb{B}$ s'écrit :

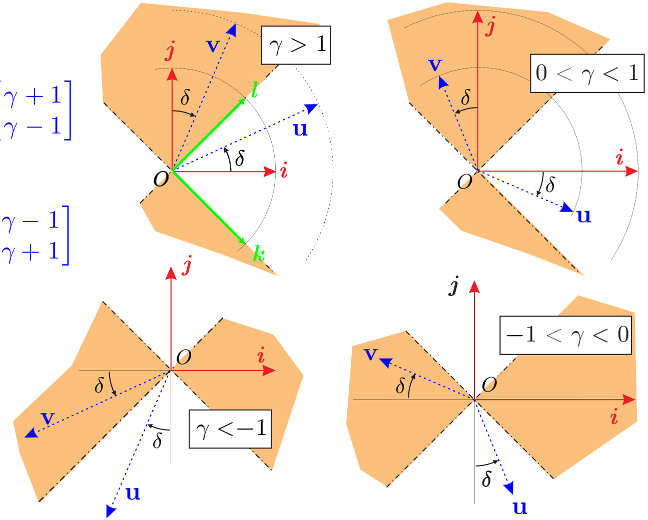
$$B_\chi = e^\chi \begin{bmatrix} \cosh(\chi) & \sinh(\chi) \\ \sinh(\chi) & \cosh(\chi) \end{bmatrix} \quad \text{quand } \gamma > 0,$$

avec $\gamma = e^{2\chi}$.

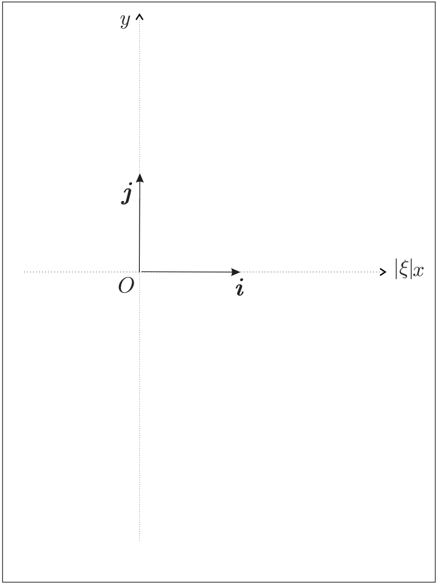
L'action des $\boldsymbol{i}$Bolsts

$$\mathbf{u}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\gamma + 1\\ \gamma - 1\end{bmatrix}$$

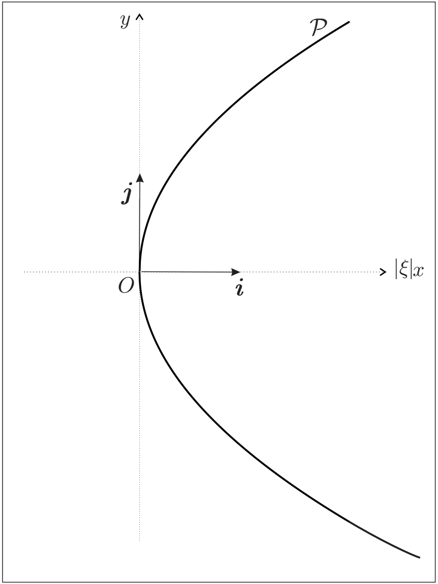
$$\mathbf{v}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\gamma - 1\\ \gamma + 1\end{bmatrix}$$



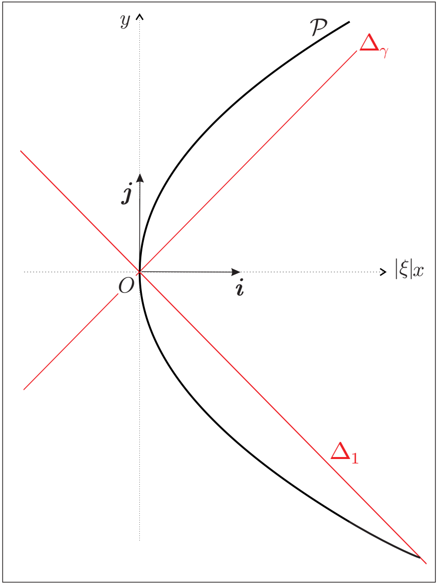
L'action des $\boldsymbol{i}$Bolsts



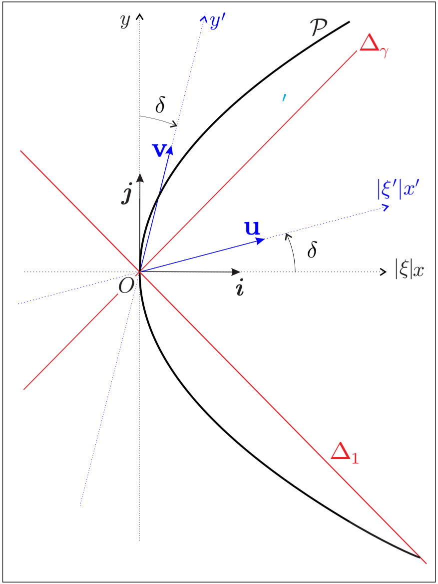
L'action des $\boldsymbol{i}$ Bolsts



L'action des $\boldsymbol{i}$Bolsts

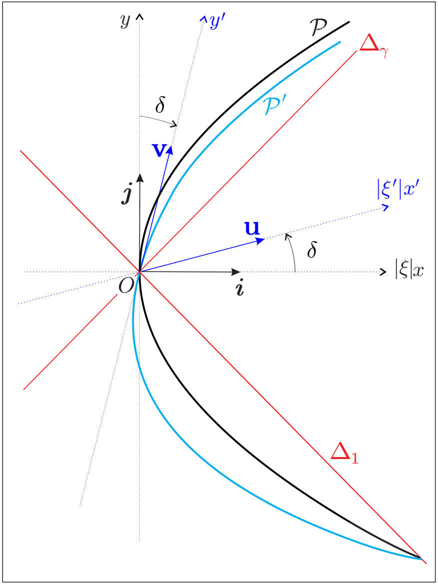


L'action des $\boldsymbol{i}$Bolsts

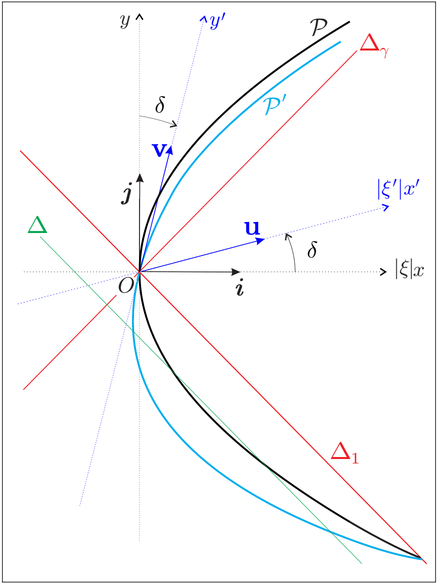


$$\tan\delta = \left|\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right|$$

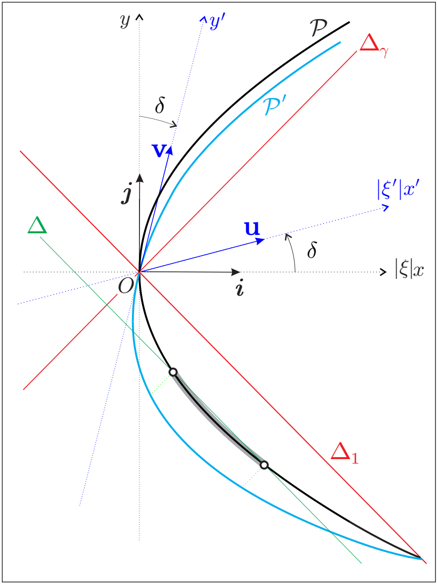
L'action des $\boldsymbol{i}$Bolsts



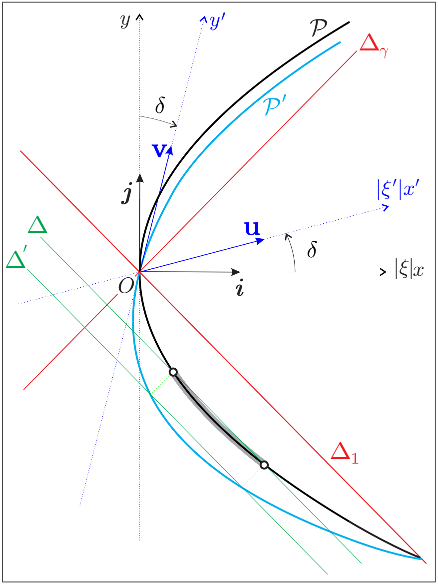
L'action des $\boldsymbol{i}$Bolsts



L'action des *i* Bolsts

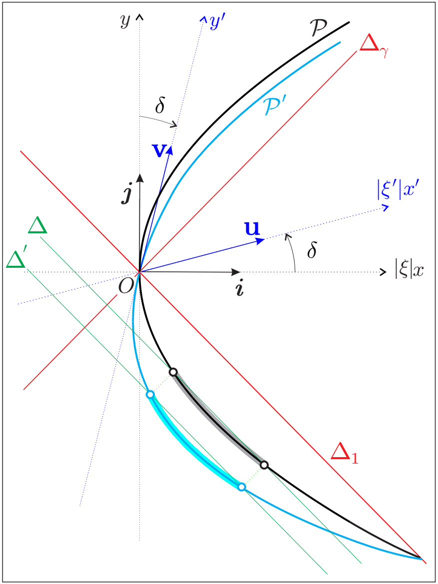


L'action des $\boldsymbol{i}$Bolsts



$$\Lambda' = \sqrt{|\gamma|}\,\Lambda$$

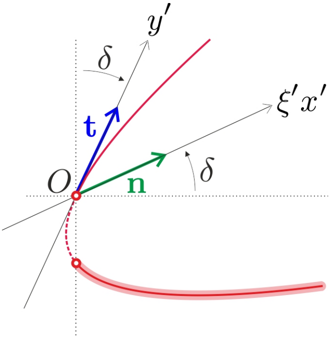
L'action des $\boldsymbol{i}$Bolsts



Référentiels propres

Définition

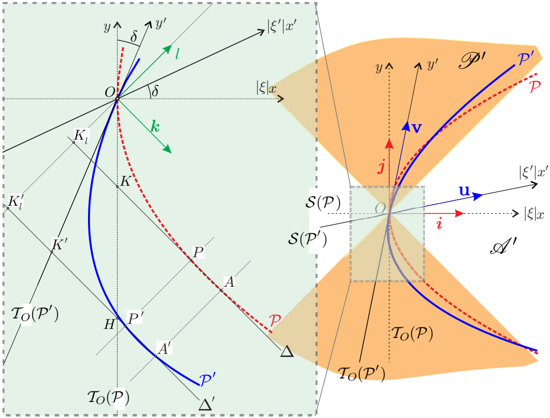
Le référentiel propre d'une parabole $\mathcal{P}$ est $(O, \mathbf{t}, \mathbf{n})$ où $\mathcal{T}_O(\mathcal{P}) = \mathbb{R}\mathbf{t}$ est la tangente à $\mathcal{P}$ en l'origine O et $\mathcal{S}(\mathcal{P}) = \mathbb{R}\mathbf{n}$ son axe de symétrie.



Etre ou ne pas être isochrone...

Théorème

Une orbite est isochrone $\Leftrightarrow$ *Elle est l'image par un* $\boldsymbol{i}\mathrm{Bolst}$ *d'une orbite keplerienne.*



$\boldsymbol{i}$Bolsts ...

Considérons $\boldsymbol{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j})$ et $\boldsymbol{l} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$ les deux vecteurs propres de l'$\boldsymbol{i}$Bolst B_γ tels que

$$B_\gamma(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k} \text{ et } B_\gamma(\boldsymbol{l}) = \gamma \boldsymbol{l}.$$

Dans le système de coordonnées affine $(w_1 = \xi x, w_2 = y)$ et en posant $\mathbf{w}' = B_\gamma(\mathbf{w})$, on a

$$\left\{ \begin{array}{c} \xi' x' - y' = \xi x - y \\ \xi' x' + y' = \gamma(\xi x + y) \end{array} \right. \implies (\xi' x')^2 - y'^2 = \gamma\left[(\xi x)^2 - y^2\right].$$

Relativité isochrone vs Relativité restreinte

- Principe de relativité restreinte d'Einstein : les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels galiléens ;
- La longueur de l'intervalle d'espacetemps $c^2dt^2 - x^2$ est conservée dans un changement de référentiel galiléen.

Relativité isochrone vs Relativité restreinte

- Principe de relativité isochrone : les équations du mouvement sont les mêmes dans tous les référentiels propres ;
- La longueur de l'*"intervalle isochrone"*, $\xi x - y$, est conservée dans tout changement de référentiel.

Relativité isochrone vs Relativité restreinte

Principe de relativité isochrone

Dans le référentiel canonique $\mathcal{R}_O$, avec le temps propre $d\tau = \xi dt$, une orbite keplerienne (ξ, Λ^2) décrite par les coordonnées affines $(\xi x, y)$ vérifie

$$\frac{1}{16}\left[\frac{d}{d\tau}(\mathbf{w}|\boldsymbol{i})\right]^2 = (\mathbf{w}|\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}) + (\mathbf{w}_\Lambda|\boldsymbol{j})$$

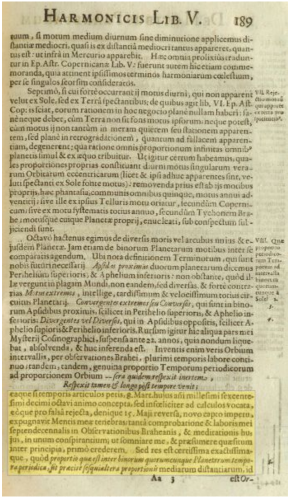
avec $\mathbf{w}_\Lambda = -\Lambda^2 \boldsymbol{j}$.
Dans le référentiel bolsté $\mathcal{R}'_O$ avec les coordonnées affines $(\xi' x', y')$ et le temps propre $d\tau' = \xi' dt'$, l'orbite bolstée vérifie

$$\frac{1}{16}\left[\frac{d}{d\tau'}(\mathbf{w}'|\mathbf{u})\right]^2 = \ (\mathbf{w}'|\mathbf{u}-\mathbf{v}) + (\mathbf{w}'_\Lambda|\mathbf{v})$$

avec $\mathbf{w}'_\Lambda = -\Lambda^2 \mathbf{v}$.

Sommaire

La 3^{eme} loi de Kepler


HARMONICIS LIB. V. 189

tuum, ſi motum medium diurnum ſine diminutione applicemus diſtantiæ mediocri, quaſi is ex diſtantiâ mediocri tantus appareret, quantus eſt: ut infrà in Mercurio apparebit. Hæc omnia prolixiùs traduntur in Ep. Aſtr. Copernicanæ Lib. V: fuerunt autem hic etiam commemoranda, quia attinent ipſiſſimos terminos harmoniarum cœleſtium, per ſe ſingulos ſeorſim conſideratos.

Septimò, ſi cui fortè occurrant ij motus diurni, qui non apparent velut ex Sole, ſed ex Terrâ ſpectantibus; de quibus agit lib. VI. Ep. Aſt. Cop: is ſciat, eorum rationem in hoc negocio planè nullam haberi: ſanè neque debet, cùm Terra non ſit fons motus ipſorum: neque poteſt, cùm motus ij non tantùm in meram quietem ſeu ſtationem apparentem, ſed planè in retrogradationem, quantum ad fallacem apparentiam, degenerent; qua ratione omnis proportionum infinitas omnib' planetis ſimul & ex æquo tribuitur. Ut igitur certum habeamus, quales proportiones proprias conſtituant diurni motus ſingularum verarum Orbitarum eccentricarum (licet & ipſi adhuc apparentes ſint, veluti ſpectanti ex Sole fonte motus): removenda prius eſt ab ijs motibus proprijs, hæc phantaſia, communis omnibus quinque, motus annui adventitij: ſive ille ex ipſius Telluris motu oriatur, ſecundùm Copernicum; ſive ex motu ſyſtematis totius annuo, ſecundùm Tychonem Brahe; motuſque cuique Planetæ proprij, enucleati, ſub conſpectum ſubjiciendi ſunt. VII. Rejectio motuũ qui apparent ex terra ſpectantib'.

Octavò hactenus egimus de diverſis moris vel arcubus unius & ejuſdem Planetæ. Jam etiam de binorum Planetarum motibus inter ſe comparatis agendum. Ubi nota definitionem Terminorum, qui ſunt nobis futuri neceſſarij. *Apſides proximas* duorum planetarum dicemus Perihelium ſuperioris, & Aphelium inferioris: non obſtante, quòd illæ vergunt in plagam Mundi, non eandem, ſed diverſas, & fortè contrarias. *Motus extremos*, intellige, tardiſſimum & velociſſimum totius circuitus Planetarij. *Convergentes extremos ſeu Converſos*, qui ſunt in binorum Apſidibus proximis, ſcilicet in Perihelio ſuperioris, & Aphelio inferioris: *Divergentes vel Diverſos*, qui in Apſidibus oppoſitis, ſcilicet Aphelio ſupioris & Perihelio inferioris. Rurſum igitur hic aliqua pars mei Myſterij Coſmographici, ſuſpenſa ante 22. annos, quia nondum liquebat, abſolvenda, & huc inferenda eſt. Inventis enim veris Orbium intervallis, per obſervationes Brahei, plurimi temporis labore continuo; tandem, tandem, genuina proportio Temporum periodicorum ad proportionem Orbium VIII. Quæ proportio periodicorum Temporum ad intervalla binorum quorumcunque à Sole? 1. 2. 3. 4.

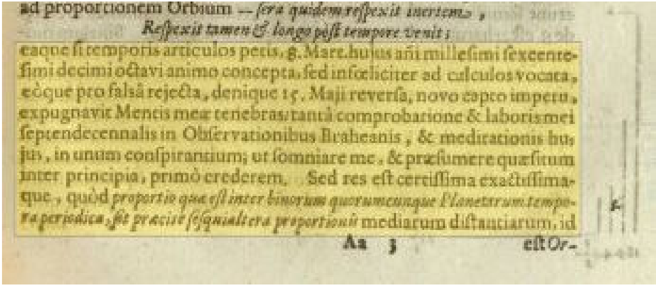
— *ſera quidem reſpexit inertem,*
Reſpexit tamen & longo poſt tempore venit;

eaque ſi temporis articulos petis, 8. Mart. hujus añi milleſimi ſexcenteſimi decimi octavi animo concepta, ſed infœliciter ad calculos vocata, eòque pro falsâ rejecta, denique 15. Maji reverſa, novo capto impetu, expugnavit Mentis meæ tenebras; tantâ comprobatione & laboris mei ſeptendecennalis in Obſervationibus Braheanis, & meditationis hujus, in unum conſpirantium; ut ſomniare me, & præſumere quæſitum inter principia, primò crederem. Sed res eſt certiſſima exactiſſimaque, quòd *proportio quæ eſt inter binorum quorumcunque Planetarum tempora periodica, ſit præcisè ſeſquialtera proportionis* mediarum diſtantiarum, id

Aa 3 eſt *Or-*

J. Kepler, *Harmonices Mundi*, 1619

La 3^{eme} loi de Kepler



ad proportionem Orbium — *sera quidem respexit inertem,*
Respexit tamen & longo post tempore venit;
eaque si temporis articulos petis, 8. Mart. hujus añi millesimi sexcentesimi decimi octavi animo concepta, sed infœliciter ad calculos vocata, eòque pro falsâ rejecta, denique 15. Maji reversa, novo capto impetu, expugnavit Mentis meæ tenebras; tantâ comprobatione & laboris mei septendecennalis in Observationibus Braheanis, & meditationis hujus, in unum conspirantium; ut somniare me, & præsumere quæsitum inter principia, primò crederem. Sed res est certissima exactissimaque, quòd *proportio quæ est inter binorum quorumcunque Planetarum tempora periodica, sit præcisè sesquialtera proportionis* mediarum distantiarum, id

Aa 3 est Or-

J. Kepler, *Harmonices Mundi*, 1619

La 3^{eme} loi de Kepler

Commun. Math. Phys.
Digital Object Identifier (DOI) https://doi.org/10.1007/s00220-018-3212-y

Communications in Mathematical Physics

CrossMark

Isochrony in 3D Radial Potentials

From Michel Hénon's Ideas to Isochrone Relativity: Classification, Interpretation and Applications

Alicia Simon-Petit[1], Jérôme Perez[1], Guillaume Duval[2]

[1] Applied Mathematics Laboratory, Ensta ParisTech, Paris Saclay University, Palaiseau, France.
E-mail: alicia.simon-petit@ensta-paristech.fr; jerome.perez@ensta-paristech.fr
[2] Mathematics and Informatics Laboratory, INSA Rouen, Saint-Étienne-du-Rouvray, France

Received: 13 October 2017 / Accepted: 31 May 2018

Demi grand axe isochrone

Pour $\psi_{\text{ke}}(r) = -\dfrac{\mu}{r}$, le demi-grand axe est $a = \dfrac{r_a + r_p}{2}$.

Pour $\psi_{\text{he}}(r) = -\dfrac{\mu}{b + \sqrt{b^2 + r^2}}$, on pose $a = \dfrac{\sqrt{b^2 + r_a^2} + \sqrt{b^2 + r_p^2}}{2}$.

Pour $\psi_{\text{bo}}(r) = \dfrac{\mu}{b + \sqrt{b^2 - r^2}}$, on définit $a = \dfrac{\sqrt{b^2 - r_a^2} + \sqrt{b^2 - r_p^2}}{2}$.

Pour ψ_{ha}^{R}, une boule homogène de rayon R, on pose $a = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2/3} R$.

La 3^{eme} loi de Kepler des isochrones

Théorème

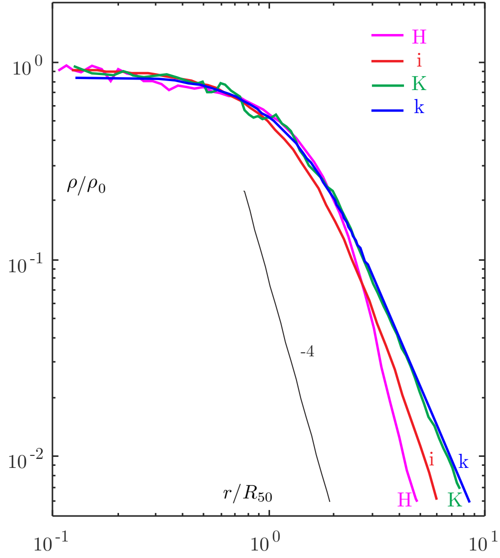
Pour toute orbite périodique dans un potentiel isochrone , le carré de la période radiale est proportionnel au cube du demi grand axe isochrone :

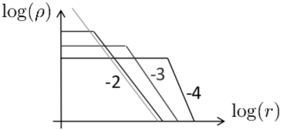
$$\tau_r^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3$$

où μ *est le paramètre de masse dans* $\psi_{\mathrm{ke}}, \psi_{\mathrm{he}}, \psi_{\mathrm{bo}}$ *ou* $\mu = \omega^2 R^3$ *dans* ψ_{ha}^R.

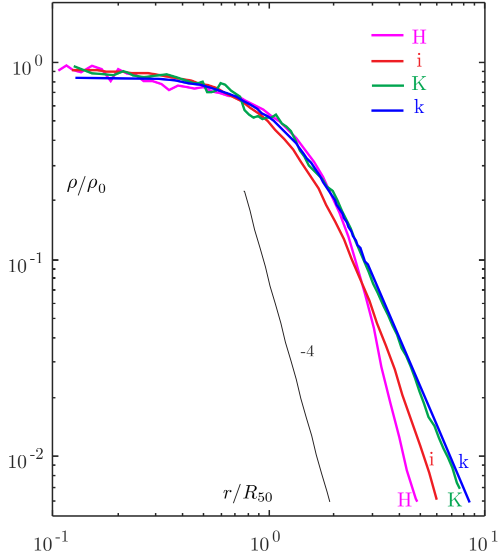
Sommaire

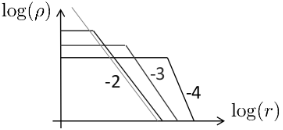
Analyse de la densité de masse





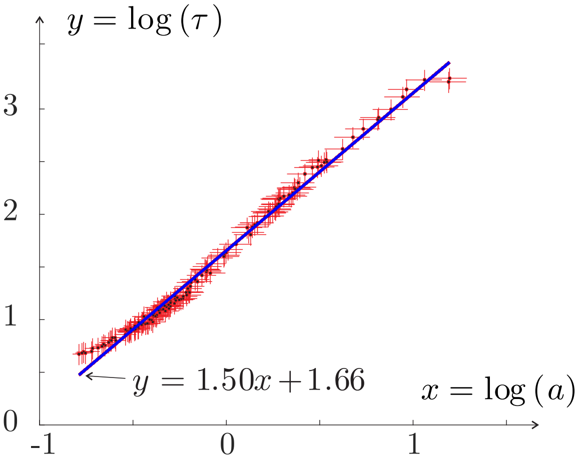
Analyse de la densité de masse



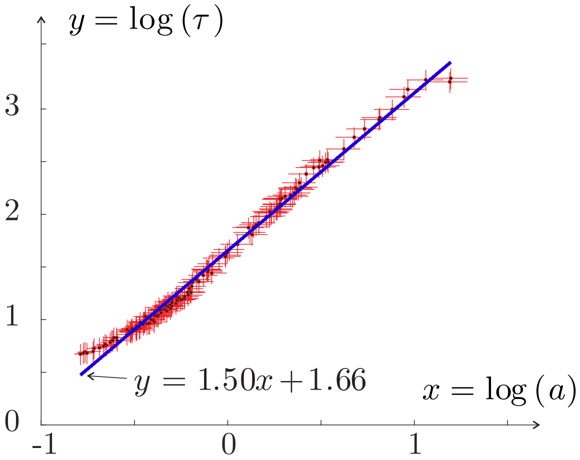


H : Sphère de Hénon ($t = 100T_d$),
i : Modèle isochrone théorique ($b = 0.36$),
K : Modèle de King numérique,
k : Modèle de King théorique ($W_0 = 9$).

Analyse isochrone d'une sphère de Hénon effondrée



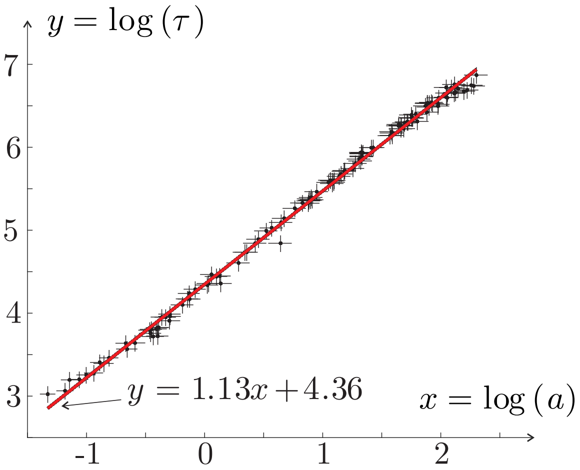
Analyse isochrone d'une sphère de Hénon effondrée



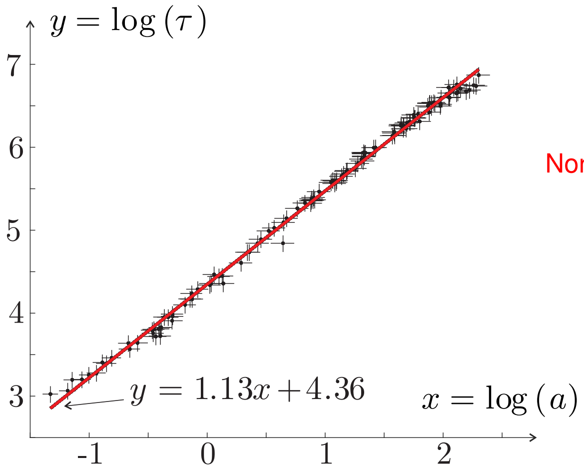
Isochrone !

$\tau^2 \propto a^3$

Analyse isochrone d'un modèle de King



Analyse isochrone d'un modèle de King



Non isochrone !

Conclusion

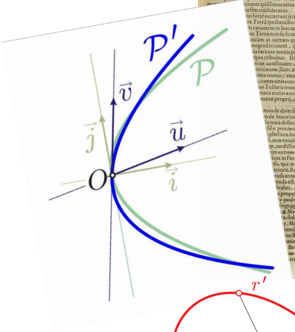
- Caractérisation géométrique de l'ensemble des potentiels isochrones ;
- Generalisation de la transformation de Bohlin :
  $(\xi_{\rm iso}, \psi_{\rm iso}) \overset{B_\gamma}{\leftrightarrow} (\xi_{\rm ke}, \psi_{\rm ke})$
- Relativité isochrone : Tout isochrone est keplerien dans son référentiel propre.
- Conséquences :
  - generalisation de la 3^{eme} loi de Kepler ;
  - compréhension fine du théorème de Bertrand.
- Le résultat de la relaxation violente est isochrone.

References

Alicia Simon-Petit, Jérôme Perez, Guillaume Duval. *Isochrony in 3D radial potentials.* In : Communication in Mathematical Physics. (Accepted, preprint : https ://arxiv.org/abs/1804.11282).

Alicia Simon-Petit, Jérôme Perez, Guillaume Plum. *A global paradigm for the evolution of self-gravitating systems.* Submitted.

Merci pour votre attention !



HARMONICIS LIB. V. 189

tuum, si motum medium diurnum sine diminutione applicemus di-
stantiæ mediocri, quasi is ex distantiâ mediocri tantus appareret, quan-
tus est: ut infrà in Mercurio apparebit. Hæc omnia prolixiùs tradun-
tur in Ep. Astr. Copernicanæ Lib. V: fuerunt autem hîc etiam comme-